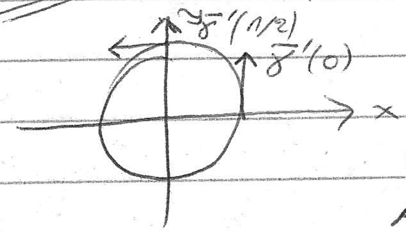
19/04/16.

Αν $\bar\gamma$: C^1- καμπύλη και $\bar\gamma'(t)\neq\bar 0 \Rightarrow \bar\gamma$: κανονική

τότε το δ/μα $\dfrac{\bar\gamma'(t)}{\|\bar\gamma'(t)\|}$ λέγεται μοναδιαίο εφ/νο δ/μα.

π.χ. $\bar\gamma(t)=(\cos t,\sin t)\Rightarrow \bar\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t)\Rightarrow \boxed{\|\bar\gamma'(t)\|=1}$

π.χ. αν $\bar\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2 \Rightarrow \bar\gamma([0,2\pi])=\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}}_{C}$



Μία άλλη παραμετρικοποίηση του C, την $\bar\jmath:[0,\pi]\to\mathbb{R}$

$\bar\jmath(t)=(\cos(2t),\sin(2t))\Rightarrow \bar\jmath([0,\pi])=C$

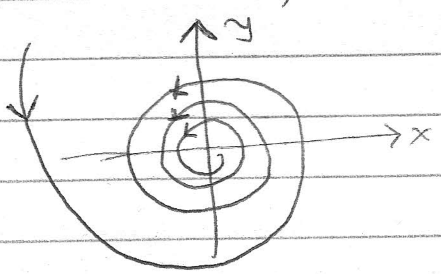
$\bar\jmath'(t)=2(-\sin t,\cos t)\Rightarrow \|\bar\jmath'(t)\|=2$

Έστω κύκλος ακτίνας $r>0 \Rightarrow C_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=r^2\}$ με πιθανές παραμετρικοποιήσεις $\bar\eta(t)=r(\cos(\alpha t),\sin(\alpha t))$

$t\in[0,\frac{2\pi}{\alpha}]$, $(\alpha>0)$

$\bar\eta'(t)=r\alpha(-\sin(\alpha t),\cos(\alpha t))\Rightarrow \boxed{\|\bar\eta'(t)\|=r\alpha}$

$\gamma(t)=e^{-t}(\cos t,\sin t)\Rightarrow \|\gamma'(t)\|=e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$, $\gamma(0)=e^{0}=(1,0)=(1,0)$



Άσκηση: Βρείτε την παράγωγο της $\bar\gamma$ (και σχεδιάστε κάποια διανύσματα ταχύτητας).

Παράδειγμα: $\bar\gamma(t)=(t^2,t^3)$, $t\in\mathbb{R}$ (παραβολή Neile).

$\bar\gamma'(t)=(2t,3t^2)$, $t\in\mathbb{R}\Rightarrow \|\bar\gamma'(t)\|=|t|\underbrace{\sqrt{4+9t^2}}_{>0,\ \forall t\in\mathbb{R}}$

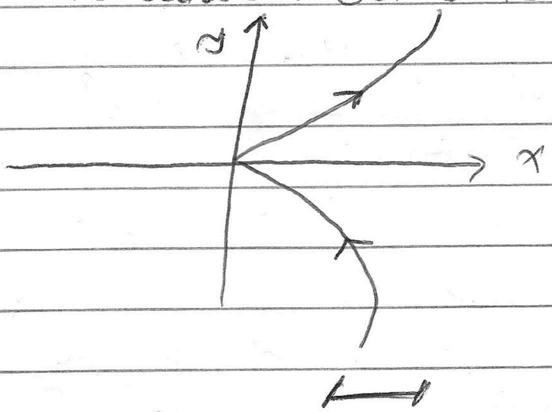
δηλ. $\bar\gamma'(t)=\begin{cases}\neq 0, & \forall t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$ $\longrightarrow$

η γ στο σημείο $t=0$ δεν είναι κανονική.

για $t^2 =: x$ τότε $t^3 =: \pm x^{3/2}$

Άρα $\gamma(\mathbb{R}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y=\pm x^{3/2}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y^2=x^3\}$

Άσκ: Επιβεβαιώστε ότι οι ισότητες ισχύουν.



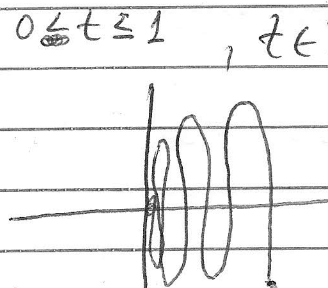
Μήκος Καμπύλης: $\gamma:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ (όχι τόξου $\gamma([\alpha,b]) = C\subset\mathbb{R}^n$)

Ορισμός: Έστω $\gamma:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ μια καμπύλη και $P([\alpha,b])$ το σύνολο των διαμερίσεων $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ με $\alpha=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ του $[\alpha,b]$. Η γ ονομάζεται ευθυγραμμίσιμη (δηλ. έχει μήκος στο $\mathbb{R}$) αν υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) το μήκος της καμπύλης:

$$L(\gamma)=\sup\Big\{\sum_{k=1}^{n}\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\| :$$
$$P=\{t_0,\dots,t_k\}\in P([\alpha,b])\Big\}\in\mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: $\exists$ και μη-ευθυγραμμίσιμες καμπύλες, δηλ. $\exists\, \gamma:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$

π.χ. $\gamma(t)=\begin{cases}(t,\ t\cos(\frac{\pi}{t})), & 0<t\leq 1\\ (0,0), & t=0\end{cases}$, $t\in[0,1]$

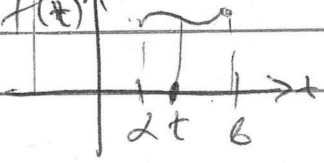


συνεχής με $L(\gamma)=\infty$

$\gamma(t)=(t,f(t))\in\mathbb{R}^2$

$\{\gamma(t): t\in[\alpha,b]\}$ = εικόνα της γ

= γράφημα της συνάρτησης $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$.



Υπάρχουν όμως και καμπύλες για τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε <πολύ εύκολα> το μήκος τους.

<u>Θεώρημα (3.7.2)</u> Μια C^1-καμπύλη $\bar{\gamma}:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη και έχει μήκος $L(\bar{\gamma})=\int_\alpha^b \|\bar{\gamma}'(t)\|\,dt$.

<u>Αποδ</u> <u>Λήμμα</u>: Έστω η καμπύλη $\bar{\gamma}:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$, C^1 Τότε:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ \forall t,\tau\in[\alpha,b]: |t-\tau|\in(0,\delta):$$
$$:\left\|\frac{\bar{\gamma}(t)-\bar{\gamma}(\tau)}{t-\tau}-\bar{\gamma}'(t)\right\|<\varepsilon$$

<u>Αποδ</u>: $\bar{\gamma}=C^1\Rightarrow\bar{\gamma}'=C\Rightarrow\bar{\gamma}':[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$

με $\bar{\gamma}'=\begin{pmatrix}\gamma_1'\\ \vdots\\ \gamma_n'\end{pmatrix}$ έχει συνιστώσες που είναι ομοιόμορφα συνεχείς $\Rightarrow$

$$\Rightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ \forall t,s\in[\alpha,b]:|t-s|<\delta,\ \forall i=1,\dots,n:$$
$$:|\gamma_i'(s)-\gamma_i'(t)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Επίσης, αφού $\gamma_i:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις άρα ισχύει το ΘΜΤ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\forall t,\tau\in[\alpha,b]:0<|t-\tau|<\delta:\ \frac{\gamma_i(t)-\gamma_i(t)}{t-\tau}=$$
$$=\gamma_i'(t+\theta_i(\tau-t)),\ \theta_i\in(0,1).\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ \forall t,\tau\in[\alpha,b]\ |t-\tau|\in(0,\delta):\left\|\frac{\bar{\gamma}(t)-\bar{\gamma}(\tau)}{t-\tau}-\bar{\gamma}'(t)\right\|^2=$$
$$=\sum_{i=1}^n\Big|\underbrace{\frac{\gamma_i(t)-\gamma_i(\tau)}{t-\tau}}_{\gamma_i'(t+\theta(\tau-t))}-\gamma_i'(t)\Big|^2\overset{*}{\leq}\sum_{i=1}^n\frac{\varepsilon^2}{n}=\varepsilon^2$$

* αφού $|t+\theta_i(\tau-t)-t|=\underbrace{|\theta_i|}_{<1}\underbrace{|\tau-t|}_{<\delta}$

<u>ΛΗΜΜΑ</u> (Τριγωνική ανισότητα διανυσματικών ολ/των): Για το ολ/μα της καμπύλης $\bar{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_n):[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ (όχι επικαμπύλιο ολ/μα) $\int_\alpha^b\bar{\gamma}(t)\,dt:=\begin{pmatrix}\int_\alpha^b\gamma_1(t)\,dt\\ \vdots\\ \int_\alpha^b\gamma_n(t)\,dt\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:

$$\left\|\int_\alpha^b\bar{\gamma}(t)\,dt\right\|\leq\int_\alpha^b\|\bar{\gamma}(t)\|\,dt$$

Αποδ (Λήμματος): $\bar{\gamma}$: συνεχής $\Rightarrow \gamma_i$ συνεχής κ' $\|\bar{\gamma}\|$: συνεχής $\Rightarrow$ $\forall i=1,\dots,n$ γ_i και $\|\bar{\gamma}\|$ ολ/ρες στο $[\alpha,\beta]$ $\xrightarrow{\text{Θεώρ. Riemann}}$

πεδίο ορισμού $[\alpha,\beta]$

$\Rightarrow$ Για $S_\nu^{(i)} = \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_i\left(\alpha + k\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$, $s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \|\bar{\gamma}(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{\nu})\|\frac{1}{\nu}$, ισχύει: $\lim_{\nu\to\infty} S_\nu^{(i)} = \int_\alpha^\beta \gamma_i(t)dt$, $\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = \int_\alpha^\beta \|\gamma(t)\|dt$

$$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \int_\alpha^\beta \bar{\gamma}(t)dt \Rightarrow \lim \|S_\nu\| = \left\|\int_\alpha^\beta \bar{\gamma}(t)dt\right\|$$

Όμως $\|S_\nu\| = \left\|\sum_{k=1}^{\nu}\bar{\gamma}(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{\nu})\frac{1}{\nu}\right\| \le \sum_{k=1}^{\nu}\|\bar{\gamma}(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{\nu})\frac{1}{\nu}\| = s_\nu$

δηλ. έχουμε $\|S_\nu\| \le s_\nu$

$$\left\|\int_\alpha^\beta \bar{\gamma}(t)dt\right\| \le \int_\alpha^\beta \|\gamma(t)\|dt$$

($\nu\to\infty$)

Αποδ (Θεωρήματος): Έστω $P=\{t_0,\dots,t_\nu\}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta] \Rightarrow \sum_{k=1}^{\nu}\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\| \xlongequal[\text{Απειρ. Λογ.}]{\text{Θεμ. Θεώρ}} \sum_{k=1}^{\nu}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma'(t)dt\right\| \le$

$\overset{\text{ΛΗΜΜΑ 2}}{\le} \underbrace{\sum_{k=1}^{\nu}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|\gamma'(t)\|dt}_{=\int_\alpha^\beta \gamma'(t)dt} \Rightarrow L(\gamma) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\| : P\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])\right\} \le$

$\le \int_\alpha^\beta \|\gamma'(t)\|dt.$

(A)

Για να δείξουμε ισότητα αρκεί νδο $(\forall\varepsilon>0)(\exists A)$ με $\left|\int_\alpha^\beta \|\bar{\gamma}'(t)\|dt - (A)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Αφού $\|\bar{\gamma}'\|:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολ/μη έχουμε ότι $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta_1)$: $\forall P\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$: $\|P\|<\delta_1$: $\left|\int_\alpha^\beta\|\gamma'(t)\|dt - \sum_{k=1}^{\nu}\|\gamma'(t_k)\|(t_k-t_{k-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Από το Λήμμα ① $\Rightarrow (\exists\delta<\delta_1)$ $\left\|\frac{\bar{\gamma}(t_k)-\bar{\gamma}(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}} - \bar{\gamma}'(t_k)\right\| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$

$\Rightarrow \left|\underbrace{\int_\alpha^\beta\|\gamma'(t)\|dt}_{=(B)} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\nu}\|\bar{\gamma}(t_k)-\bar{\gamma}(t_{k-1})\|}_{=(A)}\right| \le \left|(B) - \sum_{k=1}^{\nu}\|\bar{\gamma}'(t_k)\|\cdot(t_k-t_{k-1})\right| +$

$+ \sum_{k=1}^{\nu}\left|\|\bar{\gamma}(t_k)-\bar{\gamma}(t_{k-1})\| - \|\bar{\gamma}'(t_k)(t_k-t_{k-1})\|\right|^2$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\nu}\frac{\varepsilon(t_k-t_{k-1})}{2(\beta-\alpha)} = \varepsilon$